3. A RUGALMASSÁGTAN ENERGIA ELVEI

A rugalmasságtan egyenletrendszerének egzakt és közelítő megoldásai energia elvekre alapozva is előállíthatók.

3.1. Alapfogalmak

3.1.1. Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező

Jelölése: $\overset{*}{\vec{u}} = \overset{*}{\vec{u}}(\vec{r}) = \overset{*}{\vec{u}}(x,y,z)$.

A továbbiakban * jellel (csillaggal) jelölünk minden kinematikailag lehetséges mennyiséget.

Értelmezés: egy elmozdulásmező kinematikailag lehetséges, ha:

- folytonos és a hely szerint elegendően sokszor differenciálható a test V térfogatán (ekkor a kompatibilitási egyenlet identikusan teljesül):

$$\overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \overset{*}{\vec{u}}\right)$$

- kielégíti a kinematikai peremfeltételt a test (A_u) felületén: $\overset{*}{\vec{u}} = \vec{u}_0$,

  ahol $\vec{u}_0$ előírt (ismert) elmozdulás.

A kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőből kinematikailag lehetséges alakváltozási mező és kinematikailag lehetséges feszültségmező is előállítható.

A kinematikailag lehetséges alakváltozási mező: $\overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \overset{*}{\vec{u}}\right)$.

A kinematikailag lehetséges feszültségmező: $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} = 2G\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\overset{*}{A}_I \underline{\underline{E}}\right)$.

A kinematikailag lehetséges feszültségmező az egyensúlyi egyenleteket és a dinamikai peremfeltételeket általában nem elégíti ki, azaz a V térfogaton $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} \neq \vec{0}$ és az A_p felületen $\overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} \neq \vec{p}_0$.

Ha az egyensúlyi egyenletek és a dinamikai peremfeltételek is kielégülnek, akkor $\overset{*}{\vec{u}}(x,y,z) = \vec{u}(x,y,z)$ a valóságos (tényleges) megoldás.

Egy peremérték feladatnál végtelen sok kinematikailag lehetséges elmozdulásmező állítható elő. Ezek közül csak egy van, amely a peremérték feladatnak valóságos (tényleges) megoldása.

3.1.2. Statikailag lehetséges feszültségmező

Jelölése: $\overline{\underline{\underline{F}}} = \overline{\underline{\underline{F}}}(\vec{r}) = \overline{\underline{\underline{F}}}(x,y,z)$.

A továbbiakban $\overline{}$ jellel (felülvonással) jelölünk minden statikailag lehetséges mennyiséget.

Értelmezés: egy feszültségmező statikailag lehetséges, ha

- kielégíti az egyensúlyi egyenleteket a test V térfogatán: $\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$,
- kielégíti a dinamikai peremfeltételeket a test A_p felületén: $\overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$,

  ahol $\vec{p}_0$ előírt (ismert) felületi terhelés.

A statikailag lehetséges feszültségmezőből statikailag lehetséges alakváltozási mező is előállítható.
Statikailag lehetséges alakváltozási mező az általános Hooke-törvény segítségével számítható:

$$\overline{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2G}\left(\overline{\underline{\underline{F}}} - \frac{\nu}{1+\nu}\overline{F}_I \underline{\underline{E}}\right).$$

A statikailag lehetséges alakváltozási mező és a belőle számítható statikailag lehetséges elmozdulásmező a kompatibilitási egyenleteket és a kinematikai peremfeltételeket általában nem elégíti ki: $\nabla \times \overline{\underline{\underline{A}}} \times \nabla \neq \underline{\underline{0}}$, $\overline{\vec{u}} \neq \vec{u}_0$.

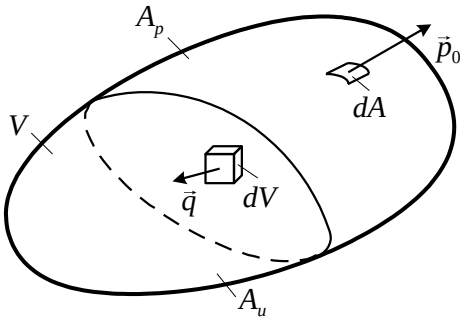
Ha a kompatibilitási egyenlet és a kinematikai peremfeltételek is kielégülnek, akkor $\overline{\underline{\underline{F}}}(x,y,z)=\underline{\underline{F}}(x,y,z)$ a feladat valóságos (tényleges) megoldása.

Egy peremérték feladatnál végtelen sok statikailag lehetséges feszültségmező állítható elő. Ezek közül csak egy van, amely a peremérték feladatnak valóságos (tényleges) megoldása.

3.2. A virtuális munka elve

Legyen $\overset{*}{\vec{u}}(\vec{r})$ egy kinematikailag lehetséges elmozdulásmező, $\overline{\underline{\underline{F}}}(\vec{r})$ pedig egy statikailag lehetséges feszültségmező. Nem szükséges, hogy ezek ugyanahhoz a peremérték feladathoz tartozzanak.

Két kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbségét *virtuális elmozdulásmező*nek is szokták nevezni: $\delta\vec{u}=\overset{*}{\vec{u}}_1-\overset{*}{\vec{u}}_2$.



A virtuális munka elvét az egyensúlyi egyenletekből kiindulva állítjuk elő:

$$\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla+\vec{q}=\vec{0}.$$

Az egyensúlyi egyenletet szorozzuk meg balról skalárisan $\overset{*}{\vec{u}}$ -val.

$$\overset{*}{\vec{u}}\cdot\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)+\overset{*}{\vec{u}}\cdot\vec{q}=\vec{0}.$$

A zárójel azt fejezi ki, hogy ∇ csak a zárójelen belüli mennyiségre hat. Vegyük mindkét oldal térfogati integrálját a test teljes V térfogatára:

$$\int_{(V)}\overset{*}{\vec{u}}\cdot\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)dV+\int_{(V)}\overset{*}{\vec{u}}\cdot\vec{q}\,dV=\vec{0}.$$

Az integranduszt másképp felírva:

$$\overset{*}{\vec{u}}\cdot\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)=\left(\overset{*}{\vec{u}}\cdot\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)-\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\left(\overset{*}{\vec{u}}\circ\nabla\right).$$

Ebben az egyenletben megjelent a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező derivált tenzora: $\overset{*}{\underline{\underline{D}}}=\left(\overset{*}{\vec{u}}\circ\nabla\right)$.

A kinematikailag lehetséges elmozdulásmező derivált tenzora felbontható szimmetrikus és ferde szimmetrikus részre:

$$\overset{*}{\underline{\underline{D}}}=\underset{\text{szimmetrikus}}{\overset{*}{\underline{\underline{A}}}}+\underbrace{\overset{*}{\underline{\underline{\Psi}}}}_{\text{ferdeszimmetrikus}}.$$

Itt $\overset{*}{\underline{\underline{A}}}$ a kinematikailag lehetséges alakváltozási tenzor, míg $\overset{*}{\underline{\underline{\Psi}}}$ a kinematikailag lehetséges forgató tenzor.

Ezt figyelembe véve: $\overset{*}{\vec{u}}\cdot\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)=\left(\overset{*}{\vec{u}}\cdot\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\nabla\right)-\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}+\overset{*}{\underline{\underline{\Psi}}}\right)$.

Bizonyítható, hogy egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor kétszeres skaláris szorzata mindig nulla: $\overline{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\overset{*}{\underline{\underline{\Psi}}}=0$.

Ezt felhasználva: $\int\limits_{(V)} \left[\left(\overset{*}{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \nabla \right) - \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} + \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q} \right] dV = 0$

Felhasználva a Gauss-féle integrálátalakítási tételt: $\int\limits_{(V)} \left(\overset{*}{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \nabla \right) dV = \int\limits_{(A)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA$.

A virtuális munka elvének legáltalánosabb alakja:

$$\int\limits_{(V)} \left(\underline{\underline{\overline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} \right) dV = \int\limits_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q}\, dV + \int\limits_{(A)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA \quad .$$

A virtuális munka elvének ez az alakja ugyanarra a testre vonatkozik, de nem ugyanarra a peremérték feladatra.

A virtuális munka elvét felírhatjuk ugyanarra a peremérték feladatra is. Mivel $A = A_u \cup A_p$, ezért a felületi integrál így két részre bontható:

$$\int\limits_{(V)} \left(\underline{\underline{\overline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} \right) dV = \int\limits_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q}\, dV + \int\limits_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA + \int\limits_{(A_p)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0\, dA \quad .$$

- $\int\limits_{(V)} \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} dV$ a virtuális alakváltozási energia,
- $\int\limits_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q}\, dV$ a térfogati erőrendszer munkája egy virtuális elmozdulás mezőn,
- $\int\limits_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA$ a belső erőrendszer munkája ismert elmozdulás mezőn,
- $\int\limits_{(A_p)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0\, dA$ pedig a megadott felületi erőrendszer munkája egy virtuális elmozdulás mezőn.

A virtuális munka elve valóságos elmozdulás, alakváltozás és feszültség mezőkre is igaz. A virtuális munka elve anyagtörvénytől függetlenül érvényes.

Ha a virtuális munka elvét két különböző kinematikailag lehetséges elmozdulás mezőre írjuk fel és ezt a két egyenletet egymásból kivonjuk, akkor az ún. *virtuális elmozdulás elvét* kapjuk:

$$\int\limits_{(V)} \left(\underline{\underline{\overline{F}}} \cdot\cdot \delta \overset{*}{\underline{\underline{A}}} \right) dV = \int\limits_{(V)} \delta \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV + \int\limits_{(A_p)} \delta \vec{u} \cdot \vec{p}_0\, dA \quad .$$

Az elv felírásánál felhasználtuk, hogy $\delta \vec{u} = \overset{*}{\vec{u}}_1 - \overset{*}{\vec{u}}_2$ és $\delta \overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_1 - \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_2$, valamint $\underline{\underline{\overline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$.

3.3. A teljes potenciális energia minimuma elv

A teljes potenciális energia minimuma elv konzervatív erőrendszerek esetén érvényes.

Konzervatív erőrendszer: olyan erőrendszer, amely hatása során nem lép fel disszipáció (energiaveszteség, azaz vissza nem nyerhető energia).

A teljes potenciális energia értelmezése: $\Pi = U - W_k$.

A teljes potenciális energia az alakváltozási energiának, azaz a belső erőrendszer potenciáljának és a külső erőrendszer potenciáljának összege.

A külső erőrendszer potenciálját formailag a külső erőrendszer munkájának mínusz egyszeresével írjuk fel:

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV}_{\text{alakváltozási energia}} - \underbrace{\int\limits_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV}_{\text{térfogati erőrendszer munkája}} - \underbrace{\int\limits_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0\, dA}_{\text{felületi erőrendszer munkája}} \quad .$$

A teljes potenciális energia minimuma elvnél az $\vec{u}$ elmozdulásmező az elsődleges (primer) ismeretlen: $\Pi = \Pi(\vec{u})$.

Az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási- és az $\underline{\underline{F}}$ feszültségmező az $\vec{u}$ -ból származtatott (másodlagos) mennyiség.

Egy $\overset{*}{\vec{u}}$ kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz is számítható $\overset{*}{\Pi}$ kinematikailag lehetséges potenciális energia:

$$\overset{*}{\Pi} = \overset{*}{\Pi}\left(\overset{*}{\vec{u}}\right) = \overset{*}{U} - \int_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q}\, dV - \int_{(A_p)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{p}_0\, dA .$$

A kinematikailag lehetséges alakváltozási energia az

$$\overset{*}{U} = \frac{1}{2} \int_{(V)} \overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} dV$$

összefüggés segítségével számítható, amelyben

$$\overset{*}{\underline{\underline{F}}} = 2G\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \overset{*}{A}_I \underline{\underline{E}}\right) \qquad \text{és} \qquad \overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \frac{1}{2}\left(\overset{*}{\vec{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \overset{*}{\vec{u}}\right).$$

A minimum bizonyítása:

$\overset{*}{\vec{u}}_1 \neq \overset{*}{\vec{u}}_2$ legyen két, ugyanarra a peremérték feladatra vonatkozó kinematikailag lehetséges elmozdulásmező.

$$\overset{*}{\Pi}_2 - \overset{*}{\Pi}_1 = \overset{*}{U}_2 - \overset{*}{U}_1 - \underline{\int_{(V)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \vec{q}\, dV - \int_{(A_p)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \vec{p}_0\, dA}$$

Átalakítás az U értelmezésének és a virtuális munka elvének felhasználásával:

$$\overset{*}{U} = \frac{1}{2} \int_{(V)} \overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} dV$$

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}_2 - \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_1\right) dV = \underline{\int_{(V)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \vec{q} \cdot dV} + \int_{(A)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA .$$

$$\int_{(A)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA = \int_{(A_u)} \underbrace{\left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right)}_{=\vec{0}} \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA + \underline{\int_{(A_p)} \left(\overset{*}{\vec{u}}_2 - \overset{*}{\vec{u}}_1\right) \cdot \vec{p}_0\, dA.}$$

Mivel

Az aláhúzott tagokat helyettesítsük vissza a $\overset{*}{\Pi}_2 - \overset{*}{\Pi}_1$ potenciális energia különbségbe:

$$\overset{*}{\Pi}_2 - \overset{*}{\Pi}_1 = \frac{1}{2} \int_{(V)} \left(\overset{*}{\underline{\underline{F}}}_2 \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_2 - \overset{*}{\underline{\underline{F}}}_1 \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_1\right) dV - \int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}_2 - \overset{*}{\underline{\underline{A}}}_1\right) dV .$$

A tényleges megoldás legyen: $\overset{*}{\vec{u}}_1 = \vec{u}$,

$\overset{*}{\underline{\underline{A}}}_1 = \underline{\underline{A}}$,

$\overline{\underline{\underline{F}}} = \overset{*}{\underline{\underline{F}}}_1 = \underline{\underline{F}}$.

Egy kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz tartozó mennyiségek pedig legyenek:

$\overset{*}{\vec{u}}_2 = \overset{*}{\vec{u}}$

$\overset{*}{\underline{\underline{A}}}_2 = \overset{*}{\underline{\underline{A}}}$

$\overset{*}{\underline{\underline{F}}}_2 = \overset{*}{\underline{\underline{F}}}$

A különbség:

$$\overset{*}{\Pi} - \Pi = \frac{1}{2} \int_{(V)} \left[\overset{*}{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{A}}\right)\right] dV .$$

Átalakítás: $\left(\overset{*}{\underline{\underline{F}}}-\underline{\underline{F}}\right)\cdot\cdot\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}-\underline{\underline{A}}\right)=\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\overset{*}{\underline{\underline{A}}}-\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\overset{*}{\underline{\underline{A}}}+\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}$

Ha fennállna az $\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\overset{*}{\underline{\underline{A}}}$ összefüggés, akkor éppen az integranduszt kapnánk.

További átalakítások:

$$\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}=\left(\vec{\rho}_x\circ\vec{e}_x+\vec{\rho}_y\circ\vec{e}_y+\vec{\rho}_z\circ\vec{e}_z\right)\cdot\cdot\left(\vec{e}_x\circ\vec{e}_x+\vec{e}_y\circ\vec{e}_y+\vec{e}_z\circ\vec{e}_z\right)=$$
$$=\vec{\rho}_x\cdot\vec{e}_x+\vec{\rho}_y\cdot\vec{e}_y+\vec{\rho}_z\cdot\vec{e}_z=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=F_I.$$

Szimmetrikus tenzorok kétszeres skaláris szorzásánál a tényezők sorrendje felcserélhető:

$$\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}=\underline{\underline{E}}\cdot\cdot\underline{\underline{F}}=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=F_I.$$

Ezt felhasználva a második tag átalakítására:

$$\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}=\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{F}}-\frac{\nu}{1+\nu}F_I\underline{\underline{E}}\right)=\frac{1}{2G}\left(\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{F}}-\frac{\nu}{1+\nu}F_I\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}\right)$$

Alkalmazva a kétszeres skaláris szorzásra kapott $F_I=\underline{\underline{E}}\cdot\cdot\underline{\underline{F}}$, illetve $\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{E}}=\overset{*}{F}_I$ összefüggést, a vizsgált kétszeres skaláris szorzat:

$$\overset{*}{\underline{\underline{F}}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}=\frac{1}{2G}\left(\overset{*}{\underline{\underline{F}}}-\frac{\nu}{1+\nu}\overset{*}{F}_I\underline{\underline{E}}\right)\cdot\cdot\underline{\underline{F}}=\underbrace{\overset{*}{\underline{\underline{A}}}\cdot\cdot\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\overset{*}{\underline{\underline{A}}}}.$$

Az utolsó, kapcsos aláhúzással jelölt egyenlőségnél felhasználtuk, hogy szimmetrikus tenzorok kétszeres skaláris szorzásánál a tényezők sorrendje felcserélhető.
A kérdéses egyenlőség tehát tényleg fennáll!

Ezt figyelembe véve:

$$\overset{*}{\Pi}-\Pi=\frac{1}{2}\int_{(V)}\left(\overset{*}{\underline{\underline{F}}}-\underline{\underline{F}}\right)\cdot\cdot\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}-\underline{\underline{A}}\right)dV=\int_{(V)}\underbrace{u\left(\overset{*}{\underline{\underline{A}}}-\underline{\underline{A}}\right)}_{\geq 0\,(\text{energia jellegű})}dV\geq 0.$$

A teljes potenciális energia minimuma elv: $\overset{*}{\Pi}-\Pi\geq 0$.

Az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmező közül a teljes potenciális energia a tényleges elmozdulásmezőre *minimumot* szolgáltat.

$\overset{*}{\Pi}=\Pi$ csak akkor áll fenn, ha $\overset{*}{\underline{\underline{A}}}=\underline{\underline{A}}$ és $\overset{*}{\vec{u}}=\vec{u}$.

Egzakt megoldás: ha az összes kinematikailag lehetséges $\overset{*}{\Pi}$ közül választjuk ki a legkisebbet: $\overset{*}{\Pi}_{\min}=\Pi$.

Közelítő megoldás: ha nem az összes kinematikailag lehetséges $\overset{*}{\Pi}$ közül választjuk ki a legkisebbet: $\overset{*}{\Pi}_{\min}\neq\Pi$.

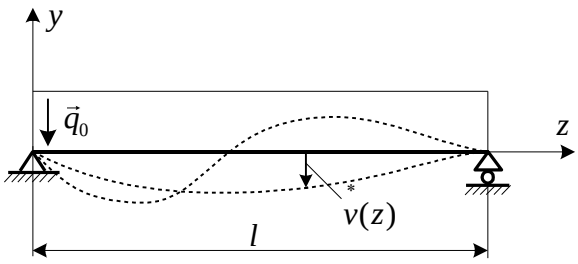
A teljes potenciális energia minimuma elv síkbeli tartókra

Példaként vizsgáljunk meg egy síkbeli hajlított-nyírt tartót, amelyre $\vec{q}_0=q_y\vec{e}_y$ vonal mentén megoszló erőrendszer hat.

Ebben az esetben a virtuális elmozdulás csak y irányú: $\overset{*}{\vec{u}}(z)=\overset{*}{v}(z)\vec{e}_y$.

Minden kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz számítható egy $\overset{*}{\Pi}$ teljes potenciális energia.

A teljes potenciális energia minimuma elv: $\overset{*}{\Pi}\geq\Pi$.



Válasszunk két kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt:

$$\overset{*}{v}_1(z) = c_1 \sin\frac{\pi}{l} z$$

$$\overset{*}{v}_2(z) = c_1 \sin\frac{\pi}{l} z + c_2 \sin\frac{3\pi}{l} z$$

Ha a trigonometrikus sorban végtelen sok tagot választanánk, akkor az egzakt megoldást kapnánk.

A megoldás pontosságáról energia értelemben is lehet beszélni. A megoldás pontosságát a $\left(\overset{*}{\Pi} - \Pi\right)$ mennyiség jellemzi.

Határozzuk meg a kinematikailag lehetséges teljes potenciális energiát:

$$\overset{*}{\Pi} = \overset{*}{U} - \overset{*}{W},$$

$$\overset{*}{\varphi} = -\frac{d\overset{*}{v}}{dz}, \qquad \overset{*}{\kappa}(z) = -\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}$$

$$\overset{*}{u} = \frac{1}{2}\overset{*}{\varepsilon}_z \overset{*}{\sigma}_z, \qquad \overset{*}{\sigma}_z = E\overset{*}{\varepsilon}_z, \qquad \overset{*}{\varepsilon}_z = \overset{*}{\kappa} y = -\frac{d^2\overset{*}{v}}{dy^2} y.$$

Itt $\overset{*}{\varphi}$ jelenti a rúd keresztmetszetének kinematikailag lehetséges szögelfordulását, $\overset{*}{\kappa}$ pedig a rúd középvonalkának kinematikailag lehetséges görbületét.

Az előbbieket felhasználva a teljes potenciális energia első tagja:

$$\int_{(V)} \overset{*}{u}\, dV = \frac{1}{2} E \int_{(l)}\int_{(A)} \left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 y^2 dA dz = \frac{1}{2} I_x E \int_{(l)} \left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 dz.$$

A külső erők munkája:

$$W_k = \int_{(l)} \overset{*}{v}(z) q_y(z) dz + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{v}_i F_{yi} + \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\varphi}_j M_j}_{\text{a koncentrált erők és nyomatékok munkája}}.$$

Egy kinematikailag lehetséges $\overset{*}{\vec{u}}$ elmozdulásmezőhöz tartozó $\overset{*}{\Pi}$ teljes potenciális energia:

$$\overset{*}{\Pi} = \frac{1}{2} I_x E \int_{(l)} \left(\frac{d^2\overset{*}{v}}{dz^2}\right)^2 dz - \int_{(l)} \overset{*}{v}(z) q_y(z) dz - \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{v}_i F_{yi} - \sum_{j=1}^{m} \overset{*}{\varphi}_j M_j.$$

3.4. A Lagrange-féle variációs elv

A teljes potenciális energia minimuma elv variációs megfogalmazása.

A teljes potenciális energia is tekinthető funkcionálnak:

$$\Pi[\vec{u}] = U[\vec{u}] - \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV - \int_{(A_p)} \vec{u} \cdot \vec{p}_0 dA.$$

Peremfeltétel: $\delta\vec{u}\big|_{A_u}=0$, azaz $\vec{u}$ értéke adott az A_u felületen.

A szélsőérték szükséges feltétele: $\delta\prod=0$,

$$\delta\prod=\delta U-\int_{(V)}\delta\vec{u}\cdot\vec{q}\,dV-\int_{(A_p)}\delta\vec{u}\cdot p_0\,dA=0 .$$

A teljes potenciális energiának a tényleges elmozdulásmezőre szélsőértéke van.

Rugalmasságtani feladatok esetén a $\delta\prod=0$ elv megegyezik (azonos) a virtuális elmozdulások elvével.

A minimum elégséges feltétele. A szélsőérték akkor minimum, ha

$$\delta^2\prod\geq 0 .$$

Bizonyítható, hogy mindkét feltétel teljesül. A második variációt második deriválttal analóg módon képezzük.

A teljes potenciális energia minimuma elv $\left(\overset{*}{\prod}\geq\prod\right)$ *és a Lagrange*[1]*-féle variációs elv* $(\delta\prod=0)$ *fizikai tartalma azonos.*

Kérdés: a teljes potenciális energia minimuma elv (vagy a Lagrange-féle variációs elv) alapján számított egzakt (vagy pontos) megoldás kielégíti-e a rugalmasságtan egyenletrendszerét?

A $\delta\prod=0$ *egyenlet fizikai tartalma:*

$$\delta\prod=\delta U-\int_{(V)}\delta\vec{u}\cdot\vec{q}-\int_{(A_p)}\delta\vec{u}\cdot\vec{p}_0\,dA=0 .$$

Az alakváltozási energián végezzük el a következő átalakításokat:

$$\delta U=\int_{(V)}\delta u\,dV=\frac{1}{2}\int_{(V)}\delta\left(\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}\right)dV=\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\delta\underline{\underline{A}}\,dV=$$

$$=\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\delta\underbrace{\left(\vec{u}\circ\nabla\right)}_{\underline{\underline{D}}}dV=\int_{(V)}\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\left(\delta\vec{u}\circ\nabla\right)dV=\int_{(V)}\left[\left(\delta\vec{u}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\nabla\right)-\delta\vec{u}\left(\underline{\underline{F}}\cdot\nabla\right)\right]dV=$$

$$=\int_{(A)}\delta\vec{u}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}\,dA-\int_{(V)}\delta\vec{u}\cdot\left(\underline{\underline{F}}\cdot\nabla\right)dV$$

$$\int_{(A_p)}\delta\vec{u}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}\,dA+\underbrace{\int_{(A_u)}\delta\vec{u}\cdot\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}\,dA}_{=\vec{0}} .$$

Az előző összefüggés negyedik egyenlőségjele után az $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási tenzor helyére $\vec{u}\circ\nabla$-t (azaz az alakváltozási vektor $\underline{\underline{D}}$ derivált tenzorát) írtuk, mert

$$\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\left(\begin{matrix}\delta\vec{u}\circ\nabla\\ \underline{\underline{D}}\end{matrix}\right)=\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\delta\underline{\underline{A}}+\underbrace{\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\delta\underline{\underline{\Psi}}}_{=0} .$$

Az $\underline{\underline{F}}\cdot\cdot\underline{\underline{\Psi}}=0$ egyenletet azért írhattuk, mert $\underline{\underline{\Psi}}$ ferdén szimmetrikus, és egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor kétszeres skaláris szorzata nulla.

A δU összefüggésen végrehajtott átalakítások eredményét behelyettesítve a *Lagrange*-féle variációs elvbe és azt átrendezve:

$$\delta\prod=-\int_{(V)}\delta\vec{u}\cdot\left[\underline{\underline{F}}\cdot\nabla+\vec{q}\right]dV+\int_{(A_p)}\delta\vec{u}\cdot\left[\underline{\underline{F}}\cdot\vec{n}-\vec{p}_0\right]dA=0.$$

Mivel $\delta\vec{u}$ tetszőleges, ezért a $\delta\prod=0$ egyenlet csak akkor teljesül, ha a [ ]-ben levő kifejezések külön-külön egyenlők zérussal. Ebből következik, hogy a teljes potenciális energia minimuma elve tartalmazza

[1] Joseph-Louis Lagrange (Giuseppe Lodovico Lagrangia) (1736-1813) francia matematikus

- az $\underline{\underline{F}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenleteket és
- az $\underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0$ dinamikai peremfeltételeket.

A variációszámítás szerint, ha a szóba jöhető összes függvényt figyelembe vesszük (konkurenciába bocsájtjuk), akkor egzakt megoldást kapunk, mert

- A kinematikailag lehetséges elmozdulásmező kielégíti a kinematikai egyenletet és a kinematikai peremfeltételeket.
- A $\delta \Pi = 0$ Lagrange-féle variációs elv pedig tartalmazza az egyensúlyi egyenletet, a dinamikai peremfeltételt, valamint az anyagtörvényt.

Az az $\vec{u}$, amelynél a Π -nek minimuma van, kielégíti a rugalmasságtan egyenletrendszerét, tehát egzakt megoldás.

Egzakt megoldás: Ha az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt figyelembe vesszük, akkor kielégülnek az egyensúlyi egyenletek és a dinamikai peremfeltételek is.

Közelítő megoldás: Ha a figyelembe vett függvények halmaza nem tartalmazza az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt, akkor a minimum elv, vagy variációs elv igyekszik kielégíteni az egyensúlyi egyenleteket és a dinamikai peremfeltételeket.

Ekkor az egyensúlyi egyenletek és a dinamikai peremfeltételek csak közelítőleg elégülnek ki.

3.5. A Ritz-módszer

A *Ritz*[2]-módszerrel közelítő megoldás állítható elő a teljes potenciális energia minimum elv felhasználásával. Az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőből egy részhalmazt ragadunk ki. A kinematikailag megengedett elmozdulásmezőt véges számú (n darab) paraméter segítségével állítjuk elő:

$$\overset{*}{\vec{u}} = \overset{*}{\vec{u}}\left(c_1, c_2, \ldots c_n\right).$$

Így teljes potenciális energiában is csak az előbb bevezetett n darab (ismeretlen) paraméter jelenik meg:

$$\overset{*}{\Pi} = \overset{*}{\Pi}\left(c_1, c_2, \ldots c_n\right).$$

Ez azt jelenti, hogy nem vesszük figyelembe az összes kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt, ami kinematikailag megengedett, hanem csak n-et. Ezek közül a mezők közül az adja a jobb közelítést, melyre fennáll a

$$\delta \overset{*}{\Pi} = \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_2} \delta c_2 + \ldots + \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_n} \delta c_n = 0$$

feltétel, hiszen a variációképzés formálisan paraméterek szerinti differenciált jelent.

Mivel $c_1, c_2, \ldots, c_n$ egymástól független, tetszőlegesen választható paraméterek, ezért

$$\delta c_1 \neq 0, \qquad \delta c_2 \neq 0, \qquad \ldots, \qquad \delta c_n \neq 0.$$

A $\delta \overset{*}{\Pi}$ tehát csak akkor lehet nulla, ha a δc_i -k együtthatói külön-külön nullával egyenlők:

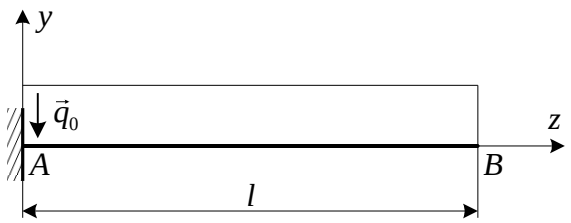
[2] Walter Ritz (1878-1909) svájci fizikus

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_1}&=0,\\ \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_2}&=0,\\ &\vdots\\ \frac{\partial \overset{*}{\Pi}}{\partial c_n}&=0.\end{aligned}\right\}\quad n \text{ darab lineáris algebrai egyenlet.}$$

Ezzel tehát a $c_1, c_2, \dots, c_n$ paraméterekre egy inhomogén, lineáris algebrai egyenletrendszert kaptunk, amelynek megoldása szolgáltatja a feladat közelítő megoldását.

Példa a Ritz-módszer alkalmazására

Tekintsünk egy befogott tartót, melynek ismerjük a geometriai adatait (l, I_x), anyagának rugalmassági modulusát (E), valamint a terhelését (q_0).



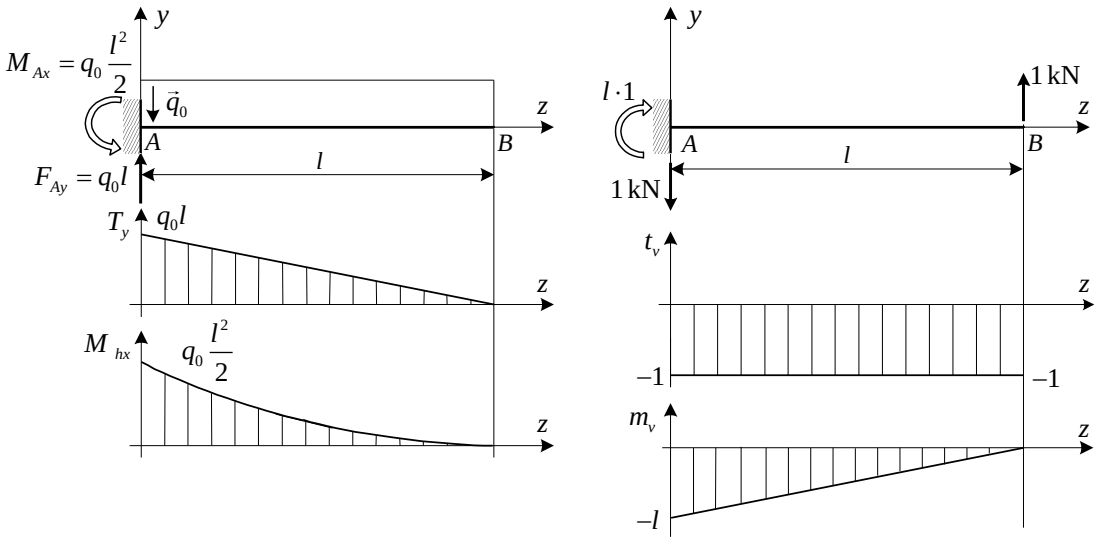
Határozzuk meg a tartó súlyponti szálának deformált alakját

a) *Betti*-tétellel (csak a B végpont v_B elmozdulását és a φ_B szögelfordulását),
b) a rugalmas szál differenciálegyenletének megoldásával,
c) *Ritz*-módszerrel.

a) Megoldás Betti-tétellel:

A v_B meghatározásához a B keresztmetszetben fel kell venni egy egységnyi, y irányú erőt. Az eredeti terheléshez és az egységnyi erőhöz tartozó igénybevételi ábrák a következő ábrán láthatók.

Eredeti terhelés: A v_B kiszámításához felvett ER:



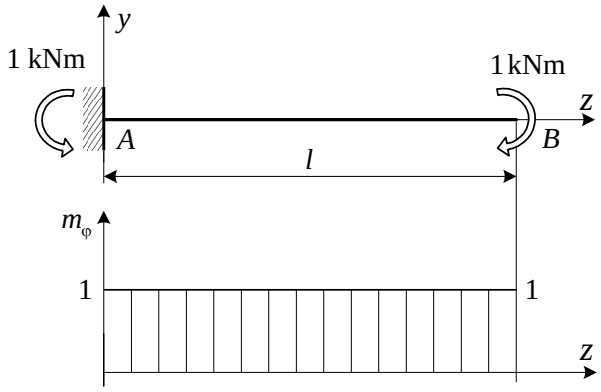
$$M_{hx}(z)=\frac{q_0 l^2}{2}-q_0 lz+\frac{q_0}{2}z^2. \qquad m_v=-(l-z).$$

Betti-tétel: $W_{21}=U_{12}$.

$$v_B=\frac{1}{I_x E}\int_{(l)} M_{hx}m_v dz=\frac{l}{6I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}(-l)+4\frac{q_0 l^2}{8}\left(-\frac{l}{2}\right)\right]=\frac{l}{6I_x E}\left(-\frac{q_0 l^3}{2}-\frac{q_0 l^3}{4}\right)=-\frac{q_0 l^4}{8I_x E} \quad \downarrow.$$

A φ_B szögelfordulás számításához a tartóra a B pontban egy egységnyi nyomatékot kell felvenni, majd az előző gondolatmenethez hasonlóan járunk el.

A φ_B kiszámításához felvett ER:



Betti-tételből: $\varphi_B=\frac{1}{I_x E}\int_{(l)} M_{hx}m_\varphi dz=\frac{l}{6I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}+4\frac{q_0 l^2}{8}\right]=\frac{q_0 l^3}{6I_x E}$.

b) Megoldás a rugalmas szál differenciálegyenletének felhasználásával:

A hajlított-nyírt tartó rugalmas szálának differenciál-egyenlete:

$$\frac{d^2 v}{dz^2}=-\frac{M_{hx}(z)}{I_x E}=-\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}-q_0 lz+\frac{q_0}{2}z^2\right].$$

A szögelfordulás differenciál-egyenlet egyszeri integrálásával határozható meg:

$$\varphi(z)=-\frac{dv}{dz}=\int_{(l)}\frac{M_{hx}(z)}{I_x E}dz+c_1=\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}z-\frac{q_0 l}{2}z^2+\frac{q_0}{6}z^3\right]+c_1.$$

A c_1 értéke a peremfeltételből adódik.

A peremfeltétel a $z=0$ helyen (a befogási helyen) $\varphi_A=0$.

$$\varphi_A(z=0)=0=\frac{1}{I_x E}[0+0+0]+c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1=0.$$

Tehát a szögelfordulás függvény: $\varphi(z)=\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}z-\frac{q_0 l}{2}z^2+\frac{q_0}{6}z^3\right]$.

A B keresztmetszet szögelfordulása: $\varphi_B=\varphi(z=l)=\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^3}{2}-\frac{q_0 l^3}{2}+\frac{q_0 l^3}{6}\right]=\frac{q_0 l^3}{6I_x E}$.

A lehajlás értékét a rugalmas szál differenciál-egyenletéből kétszeri integrálással határozhatjuk meg:

$$v(z)=-\int_{(l)}\left(\int_{(l)}\frac{M_{hx}(z)}{I_x E}dz\right)dz-\underbrace{c_1}_{=0}z+c_2=-\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{2}\frac{z^2}{2}-\frac{q_0 l}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{q_0}{6}\frac{z^4}{4}\right]+c_2.$$

A peremfeltétel $z=0$ -nál $v_A=0$, ebből pedig az előbbihez hasonló módon következik, hogy $c_2=0$.

Az elmozdulásfüggvény tehát: $$v(z) = -\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^2}{4} z^2 - \frac{q_0 l}{6} z^3 + \frac{q_0}{24} z^4\right].$$

A B keresztmetszet y irányú elmozdulása:

$$v_B = v(z=l) = -\frac{1}{I_x E}\left[\frac{q_0 l^4}{4} - \frac{q_0 l^4}{6} + \frac{q_0 l^4}{24}\right] = -\frac{3}{24}\frac{q_0 l^4}{I_x E} = -\frac{q_0 l^4}{8 I_x E}.$$

c) Megoldás Ritz-módszerrel:

Legyen kinematikailag lehetséges közelítő elmozdulásmező polinom:

$$\overset{*}{v}(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \ldots + c_n z^n.$$

A peremfeltételek: $z = 0$-nál $\quad \overset{*}{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0$,

$z = 0$-nál $\quad \overset{*}{\varphi} = -\frac{d\overset{*}{v}}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$.

1. Közelítés másodfokú polinommal:

Az első közelítő elmozdulásmezőt állítsuk elő a fenti *másodfokú közelítő polinom* segítségével. A peremfeltételek miatt a közelítő polinomban most csak a másodfokú tag szerepel. A közelítő mező és deriváltjai:

$$\overset{*}{v}_2(z) = c_2 z^2, \quad \frac{d\overset{*}{v}_2(z)}{dz} = 2c_2 z, \quad \frac{d^2\overset{*}{v}_2(z)}{dz^2} = 2c_2.$$

A teljes potenciális energia:

$$\overset{*}{\Pi}_2 = \frac{1}{2} I_x E \int_{(l)} \left(\frac{d^2 \overset{*}{v}_2(z)}{dz^2}\right)^2 dz - \int_{(l)} (-q_0)\overset{*}{v}_2\, dz = \frac{1}{2} I_x E\left(4c_2^2 l\right) + q_0 c_2 \frac{l^3}{3}.$$

A teljes potenciális energia szélsőértékének feltétele: $\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_2}{\partial c_2} = 0 = 4 I_x E c_2 l + q_0 \frac{l^3}{3}$.

Innen c_2 kifejezhető: $c_2 = -\frac{q_0 l^2}{12 I_x E}$.

A közelítő megoldás: $v_2(z) = -\frac{q_0 l^2}{12 I_x E} z^2, \qquad \varphi_2(z) = -\frac{dv_2}{dz} = \frac{q_0 l^2}{6 I_x E} z$.

Ezekbe az összefüggésekbe $z = l$ értéket behelyettesítve:

$$v_2(B) = -\frac{q_0 l^4}{12 I_x E}, \qquad \varphi_2(B) = \frac{q_0 l^3}{6 I_x E}.$$

2. *Közelítés harmadfokú polinommal:*

A közelítő elmozdulásmező legyen *harmadfokú polinom*:

$$\overset{*}{v}_3(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3, \quad \frac{d\overset{*}{v}_3(z)}{dz} = 2c_2 z + 3c_3 z^2, \quad \frac{d^2\overset{*}{v}_3(z)}{dz^2} = 2c_2 + 6c_3 z.$$

A teljes potenciális energia:

$$\overset{*}{\Pi}_3 = \frac{1}{2} I_x E \int_{(l)} \left(\frac{d^2 \overset{*}{v}_3(z)}{dz^2}\right)^2 dz - \int_{(l)} (-q_0)\overset{*}{v}_3\, dz = 2 I_x E \int_{(l)} \left(c_2 + 3c_3 z\right)^2 dz + q_0 \int_{(l)} \left(c_2 z^2 + c_3 z^3\right) =$$

$$= 2 I_x E \int_{(l)} \left(c_2^2 + 6c_2 c_3 z + 9c_3^2 z^2\right) dz + q_0\left(c_2 \frac{l^3}{3} + c_3 \frac{l^4}{4}\right) =$$

$$= 2I_xE\left(c_2^2 l + 3c_2c_3l^2 + 3c_3^2l^3\right) + q_0\left(c_2\frac{l^3}{3} + c_3\frac{l^4}{4}\right)$$

A szélsőérték feltétele: $\dfrac{\partial \overset{*}{\Pi}_3}{\partial c_2} = 0 = I_xE\left(4lc_2 + 6l^2c_3\right) + q_0\dfrac{l^3}{3}$,

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_3}{\partial c_3} = 0 = I_xE\left(6l^2c_2 + 12l^3c_3\right) + q_0\frac{l^4}{4}.$$

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 2lc_2 + 3l^2c_3 &= -\frac{q_0l^3}{6I_xE} \\ 3l^2c_2 + 6l^3c_3 &= -\frac{q_0l^4}{8I_xE} \end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletet $\frac{3}{2}l$ -lel megszorozva, majd a második egyenletből kivonva kapjuk c_3 -at: $c_3 = \dfrac{q_0l}{12I_xE}$.

Ezt visszahelyettesítve: $c_2 = \dfrac{1}{2l}\left(-\dfrac{q_0l^3}{6I_xE} - 3l^2\dfrac{q_0l}{12I_xE}\right) = -\dfrac{5q_0l^2}{24I_xE}$.

A közelítő elmozdulásmező: $v_3(z) = -\dfrac{5q_0l^2}{24I_xE}z^2 + \dfrac{q_0l}{12I_xE}z^3$.

A *B* keresztmetszet közelítő elmozdulása: $v_{3B} = v_3(z=l) = -\dfrac{5q_0l^4}{24I_xE} + \dfrac{q_0l^4}{12I_xE} = -\dfrac{q_0l^4}{8I_xE}$.

A közelítő szögelfordulásmező: $\varphi_3(z) = -\dfrac{5q_0l^2}{12I_xE}z + \dfrac{q_0l}{4I_xE}z^2$.

A B keresztmetszet közelítő szögelfordulása: $\varphi_{3B} = \dfrac{1}{6}\dfrac{q_0l^3}{I_xE}$.

3. Közelítés negyedfokú polinommal:

A közelítő elmozdulásmező legyen *negyedfokú polinom:*

$$\overset{*}{v}_4(z) = c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4, \quad \frac{d\overset{*}{v}_4(z)}{dz} = 2c_2z + 3c_3z^2 + 4c_4z^3, \quad \frac{d^2\overset{*}{v}_4(z)}{dz^2} = 2c_2 + 6c_3z + 12c_4z^2.$$

A teljes potenciális energia: $\overset{*}{\Pi}_4 = \dfrac{1}{2}I_xE\displaystyle\int_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}_4(z)}{dz^2}\right)^2 dz + q_0\int_{(l)}\overset{*}{v}_4 dz.$

A $\dfrac{d^2\overset{*}{v}_4(z)}{dz^2} = 2c_2 + 6c_3z + 12c_4z^2$ háromtagú kifejezést négyzetre emelve, majd az integrálást elvégezve, az első tag integrálja:

$$\int_{(l)}\left(\frac{d^2\overset{*}{v}_4(z)}{dz^2}\right)^2 dz = 4c_2^2l + 12c_3^2l^2 + \frac{144}{5}c_4^2l^5 + 12c_2c_3l^2 + \frac{48}{3}c_2c_4l^3 + \frac{144}{4}c_3c_4l^4.$$

A második tagja integrálja: $q_0\displaystyle\int_{(l)}\overset{*}{v}_4 dz = q_0\left(c_2\frac{l^3}{3} + c_3\frac{l^4}{4} + c_4\frac{l^5}{5}\right)$.

A szélsőérték meghatározásához elő kell állítanunk $\overset{*}{\Pi}_4$ megfelelő paraméterek szerinti deriváltjait:

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_2} = 0 = I_x E\left(8lc_2 + 12l^2c_3 + 16l^3c_4\right) + q_0\frac{l^3}{3},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_3} = 0 = I_x E\left(24l^3c_3 + 12l^2c_2 + 36l^4c_4\right) + q_0\frac{l^4}{4},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{\Pi}_4}{\partial c_4} = 0 = I_x E\left(\frac{288}{5}l^5c_4 + 16l^3c_2 + 36l^4c_3\right) + q_0\frac{l^5}{5}.$$

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 8lc_2 + 12l^2c_3 + 16l^3c_4 &= -\frac{2q_0l^3}{3I_xE} \\ 12l^2c_2 + 24l^3c_3 + 36l^4c_4 &= -\frac{2q_0l^4}{4I_xE} \\ 16l^3c_2 + 36l^4c_3 + \frac{288}{5}l^5c_4 &= -\frac{2q_0l^5}{5I_xE} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $c_2 = -\dfrac{q_0l^2}{4I_xE}$, $\quad c_3 = -\dfrac{q_0l}{6I_xE}$, $\quad c_4 = -\dfrac{q_0}{24I_xE}$.

A közelítő megoldás az elmozdulásmezőre: $v_4(z) = \dfrac{q_0}{I_xE}\left(-\dfrac{l^2}{4}z^2 + \dfrac{l}{6}z^3 - \dfrac{1}{24}z^4\right)$.

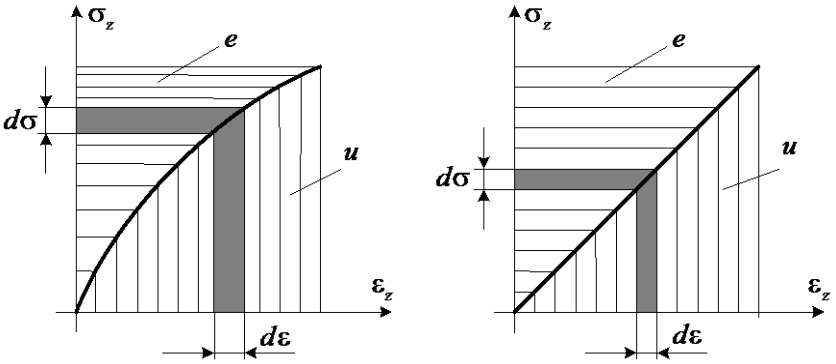
A negyedfokú polinommal kapott közelítő megoldás megegyezik az egzakt megoldással!
Ez azért van így, mert az $M_{hx}(z)$ nyomatéki függvény másodfokú. A rugalmas szál differenciál egyenletéből ezért az egzakt megoldásra egy negyedfokú polinomot kapunk. Itt a *Ritz*-módszernél felvett negyedfokú polinomsereg tartalmazza azt a negyedfokú függvényt is, ami a tényleges (egzakt) megoldás, ezért adódik belőle az egzakt megoldás.

3.6. A teljes kiegészítő energia minimuma elv

A teljes kiegészítő energia minimuma elv konzervatív erőrendszerek esetén érvényes.

A fajlagos kiegészítő alakváltozási energia értelmezése: $e = e\left(\underline{\underline{F}}\right) = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - u$.

Lineárisan rugalmas anyag esetén: $e = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - \dfrac{1}{2}\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = u$.



Általános esetben a fajlagos kiegészítő energiát a feszültségi koordináták, míg a fajlagos alakváltozási energiát az alakváltozási koordináták függvényének tekintjük:

$$e = e\left(\underline{\underline{F}}\right) = e\left(\sigma_x, \sigma_y, \ldots\right),$$

$$u = u\left(\underline{\underline{A}}\right) = u\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots\right).$$

Pl. tiszta húzás-nyomás esetén: $e = e(\sigma)$ és $u = u(\varepsilon)$.
Az ábrán jól látható az e értelmezése.

A test kiegészítő alakváltozási energiája a fajlagos kiegészítő alakváltozási energia összegzésével határozható meg:

$$E = \int_{(V)} e\, dV = \int_{(V)} \left(\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} - u \right) dV .$$

A test teljes kiegészítő energiájának értelmezése:

$$K = K\left(\underline{\underline{F}}\right) = E - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA .$$

Minden $\overline{\underline{\underline{F}}}$ statikailag lehetséges feszültségmezőhöz előállítható $\overline{K}$ statikailag lehetséges teljes kiegészítő energia:

$$\overline{K} = \overline{K}\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\right) = \overline{E} - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA .$$

A teljes kiegészítő energia minimuma elv levezetése a potenciális energia minimuma elv levezetésével analóg módon történik.

A teljes kiegészítő energia minimuma elv: $\overline{K} - K \geq 0$

Az összes statikailag lehetséges feszültségmező közül a teljes kiegészítő energia a tényleges feszültségmezőre minimumot szolgáltat.
Ebben az esetben az elsődleges ismeretlen a feszültségmező, míg az alakváltozási és az elmozdulásmező származtatott ismeretlen.

Egzakt megoldás: ha az összes statikailag lehetséges $\overline{K}$ közül választhatjuk ki a legkisebbet: $\overline{K}_{\min} = K$.

Közelítő megoldás: ha nem az összes statikailag lehetséges $\overline{K}$ közül választjuk ki a legkisebbet: $\overline{K}_{\min} \neq K$.

A teljes kiegészítő energia minimuma elv tartalmazza a kinematikai egyenleteket és a kinematikai peremfeltételeket.
Az energialevek nem lineárisan rugalmas testek kis alakváltozására is érvényesek, nem érvényesek viszont testek nagy alakváltozásai esetén.

3.7. A Castigliano-féle variációs elv

A *Castigliano*[3]-féle variációs elv a teljes kiegészítő energia minimuma elv variációs megfogalmazása.

Hozzunk létre egy statikailag lehetséges feszültségmezőt a tényleges feszültségmező kis megváltoztatásával:

$$\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}} .$$

Az $\overline{\underline{\underline{F}}}$ akkor statikailag lehetséges, ha

$$(V) \qquad \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \delta \underline{\underline{F}} \cdot \nabla = \vec{0}.$$

$$(A_p) \qquad \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p} \qquad \Rightarrow \qquad \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n} = \vec{0}.$$

A teljes kiegészítő energiát is tekinthetjük funkcionálnak: $K\left[\underline{\underline{F}}\right] = E\left[\underline{\underline{F}}\right] - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA.$

A variációs elvet lineárisan rugalmas anyagokra vezetjük le, ebben az esetben $E = U$.

Bizonyítjuk, hogy a tényleges $\underline{\underline{F}}$-re a K teljes kiegészítő energiának szélsőértéke van: $\delta K = 0$ és ez a szélsőérték minimum: $\delta^2 K \geq 0$.

[3] Carlo Alberto Castigliano (1847-1884) olasz mérnök.

Az $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{F}}$ tenzorok nem függetlenek egymástól, ezért lineárisan rugalmas esetben a K teljes kiegészítő és az U alakváltozási energia $\underline{\underline{F}}$ -re nézve kvadratikus (másodfokú) kifejezés, így statikailag lehetséges feszültségmezőben csak legfeljebb másodrendű tagok szerepelnek:

$$\overline{K} = K + \delta K + \delta^2 K\,, \qquad \overline{U} = U + \delta U + \delta^2 U\,.$$

A teljes kiegészítő energia első variációja (lineárisan rugalmas anyag esetén):

$$\delta K = \delta U - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA\,.$$

Vizsgáljuk meg, hogyan számítható $\delta U = \int_{(V)} \delta u\, dV$.

Az integrandusz: $\delta u = \delta\left(\frac{1}{2}\underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \delta \underline{\underline{A}}\right)$.

Bizonyítható, hogy $\delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \delta \underline{\underline{A}}$.

Ezt felhasználva: $\delta u = \delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}$.

Ezt visszahelyettesítve a teljes kiegészítő energia első variációjába:

$$\delta K = \int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA.$$

A virtuális munka elvének felhasználásával további átalakításokat végezhetünk:

$$\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \overset{*}{\underline{\underline{A}}}\, dV = \int_{(V)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \vec{q}\, dV + \int_{(A)} \overset{*}{\vec{u}} \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA.$$

Legyen $\overset{*}{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}$ és $\overset{*}{\vec{u}} = \vec{u}$, ekkor $\int_{(V)} \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV = \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV + \int_{(A)} \vec{u} \cdot \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n}\, dA$.

Legyen $\overline{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}$, ekkor $\int_{(V)} \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV = \int_{(V)} \vec{u} \cdot \vec{q}\, dV + \int_{(A)} \vec{u} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA$.

Vonjuk ki egymásból az előző két egyenletet:

$$\int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV = \int_{(A_p)} \vec{u}_0 \cdot \underbrace{\delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}}_{=\vec{0}}\, dA + \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA\,.$$

Egy oldalra rendezve: $\delta K = \int_{(V)} \delta \underline{\underline{F}} \cdot\cdot \underline{\underline{A}}\, dV - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \delta \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA = 0$.

A teljes kiegészítő energiának tehát az $\underline{\underline{F}}$ tényleges feszültségmezőre szélsőértéke van.

A teljes kiegészítő energia minimuma elv szerint: $\overline{K} - K \geq 0$,

$$\delta K + \delta^2 K \geq 0,$$
$$= 0$$
$$\delta^2 K \geq 0$$

A szélsőérték tehát minimum.

3.8. Közelítő megoldás előállítása a teljes kiegészítő energia minimuma elv felhasználásával

Ez a *Ritz*-módszerrel analóg eljárás.

A statikailag lehetséges feszültségmezőt véges sorral közelítjük: $\overline{\underline{\underline{F}}} = \sum_{k=1}^{n} B_k \underline{\underline{F}}_k$.
Ennek teljesítenie kell az egyensúlyi egyenletet és a dinamikai peremfeltételt:

$$(V)\ \ \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \nabla + \vec{q} = \vec{0}, \quad (A_p)\ \ \overline{\underline{\underline{F}}} \cdot \vec{n} = \vec{p}_0.$$

A teljes kiegészítő energia:

$$\overline{K} = \overline{U} - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{n}\, dA, \quad \overline{U} = \overline{U}\left(B_1, B_2, ..., B_n\right).$$

A szélsőérték feltétele:

$$\delta K = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overline{U}}{\partial B_k} \delta B_k - \sum_{k=1}^{n} \delta B_k \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}}_k \cdot \vec{n}\, dA = 0.$$

.

Mivel $B_k \ (k = 1, 2, ..., n)$ egymástól függetlenül, tetszőlegesen változtatható paraméterek, ezért az együtthatóknak kell nullának lenniük.

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial B_k} - \int_{(A_u)} \vec{u}_0 \cdot \underline{\underline{F}}_k \cdot \vec{n}\, dA = 0. \qquad k = 1, 2, \ ... \ n.$$

Ez egy n ismeretlenes inhomogén algebrai egyenletrendszer a B_k ismeretlenekre.